



第四章

平面图与图的着色II

计算机系网络所：张小平



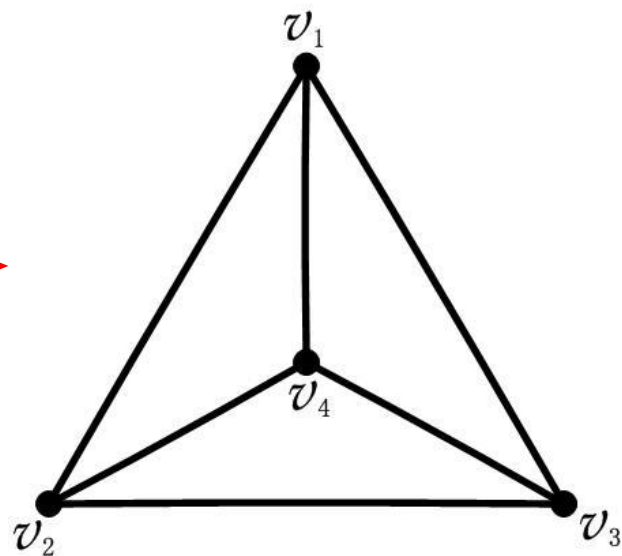
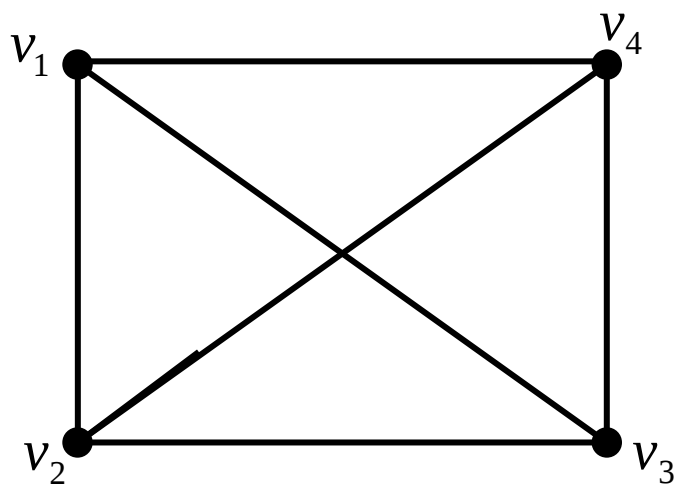
主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式



平面图

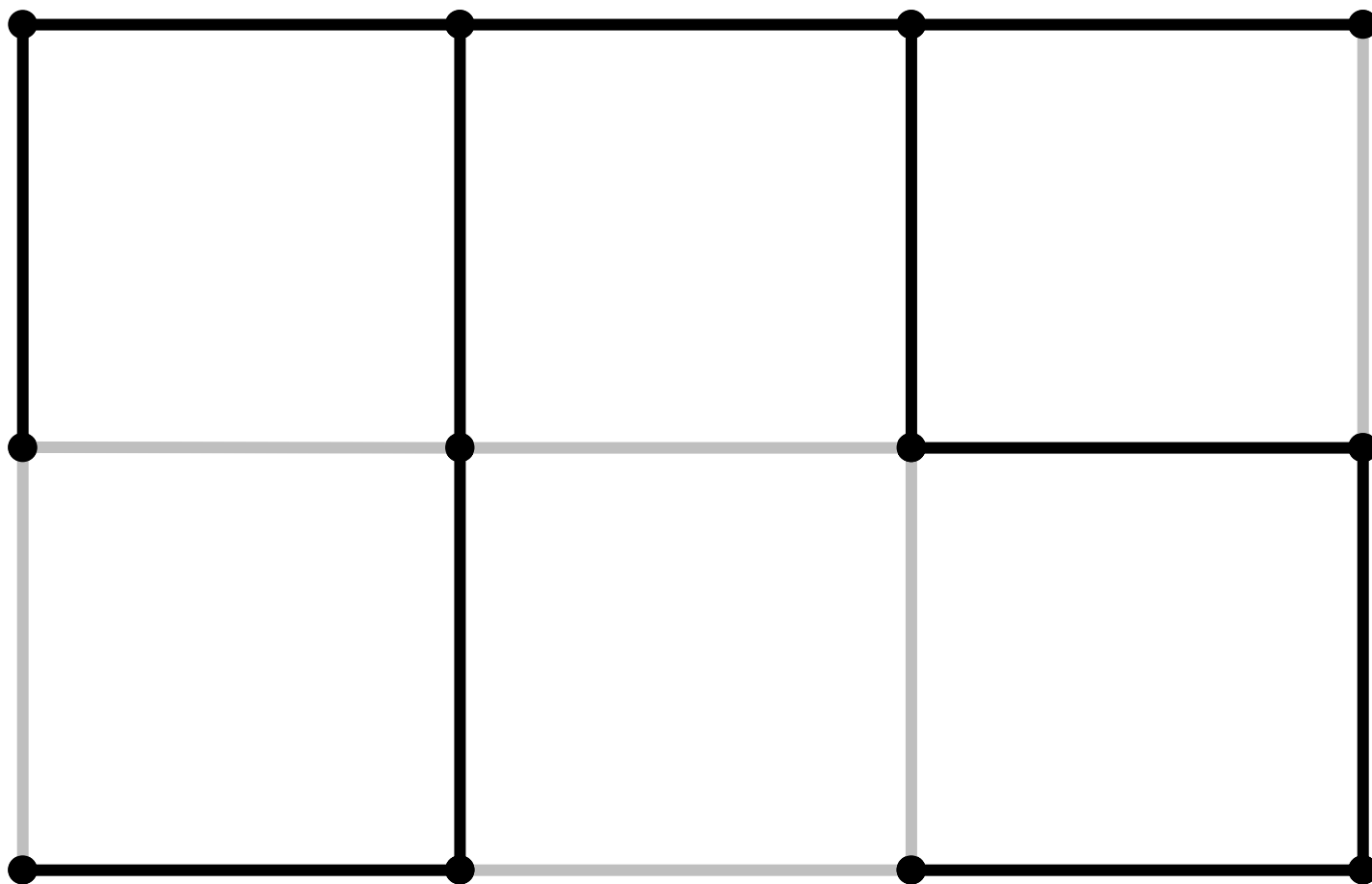
- 定义4.1.1 若能把图 G 画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称 G 可嵌入平面，或称 G 是可平面图。可平面图在平面上的一个嵌入称为平面图。





平面图

- 定义4.1.2 设 G 是一个平面图，由它的若干条边所构成的一个区域内如果不含任何结点及边，就称该区域为 G 的一个面或域。包围这个域的诸边称为该域的边界。
- 把平面图 G 外边的无限区域称为无限域，其他区域都叫做内部域。
- 如果两个域有共同边界，就说它们是相邻的，否则是不相邻的。



节点数: n

边数: m

域数: d

余树边: $m - n + 1$

域数: $d = m - n + 2$



平面图

- 定理4.1.1 设 G 是平面连通图，则 G 的域的数目是 $d = m - n + 2$ 欧拉公式

证明：

- G 为连通图，其支撑树 T 包含 $n-1$ 条边，无回路，因此此时对 T 来说只有一个无限域。
- 由于 G 为平面图，因此每加入一条余树边，一定可以与其他边不相交，因此可以把当前域分为两部分。
- 有 $m - n + 1$ 条余树边！ 证毕！



平面图

- 推论4.1.1 若平面图有 k 个连通支，则

$$n - m + d = k + 1$$

- 推论4.1.2 对一般平面图 G ，恒有

$$n - m + d \geq 2$$



平面图

- 定理4.1.2 设平面连通图 G 没有割边，且每个域的边界数至少是 t ，则

$$m \leq \frac{t(n-2)}{t-2}$$

证明：

- 设 G 有 d 个域
- 由于 G 中没有割边，因此每条边都与两个不同的域相邻，因此 $t \cdot d \leq 2m$ ，带入欧拉公式

$$\frac{2m}{t} \geq m - n + 2$$

证毕！



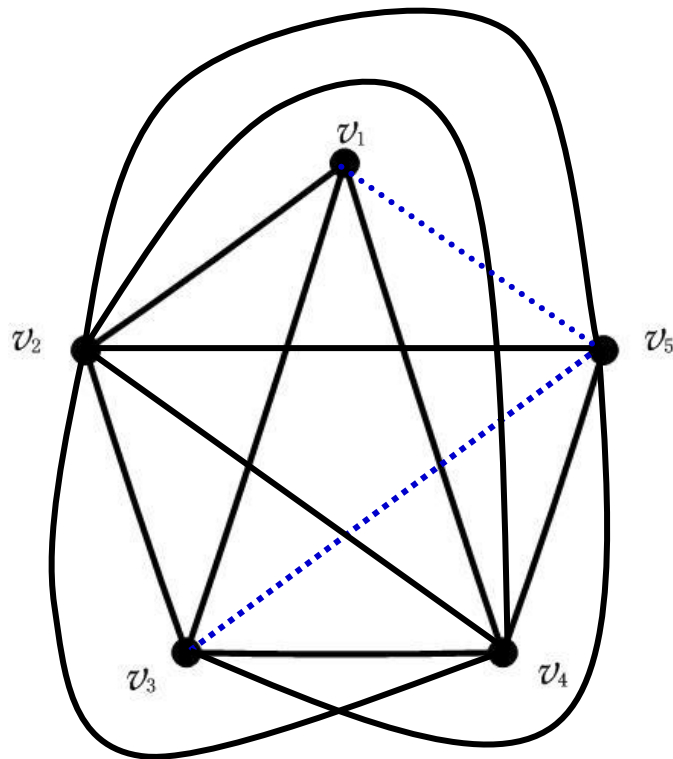
主要内容

- 4.1 平面图
- **4.2 极大平面图**
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式



极大平面图

- 定义4.2.1 设 G 是 $n \geq 3$ 的简单平面图，若在任意两个不相邻的 v_i, v_j 之间加入边 (v_i, v_j) 就会破坏图的平面性，就称 G 为极大平面图





极大平面图

- 极大平面图的性质：
 - 性质1: G 是连通的
 - 性质2: G 不存在割边
 - 性质3: G 的每个域的边界数都是3
 - 性质4: $3d = 2m$



极大平面图

- 定理4.2.1 极大平面图 G 中, 有

$$m = 3n - 6 \quad d = 2n - 4$$

证明:

$$2m = 3d$$

$$d = m - n + 2$$

— 根据性质4 和欧拉公式, 即可得证!



极大平面图

- 推论4.2.1 简单平面图 G 满足

$$m \leq 3n - 6 \quad d \leq 2n - 4$$

证明：

- 因为 G 为简单平面图，故没有自环和重边，故不会存在域边界数为1或2的情况
- 则每个域边界数至少为3，因此

$$3d \leq 2m$$

- 带入欧拉公式，即可得证！

证毕！





极大平面图

- 定理4.2.2 简单平面图 G 中存在度小于6的结点

证明（反证法）：

- 假设每个结点的度都不小于6
- 则由 $\sum d(v_i) = 2m$ 可知 $6n \leq 2m$
- 因 G 为简单平面图，故满足 $3d \leq 2m$
- 带入欧拉公式 $d = m - n + 2$

$$\longrightarrow d - m + n = 2 \leq \frac{2}{3}m - m + \frac{1}{3}m = 0$$

证毕！



极大平面图

- 例： K_7 图不是平面图！



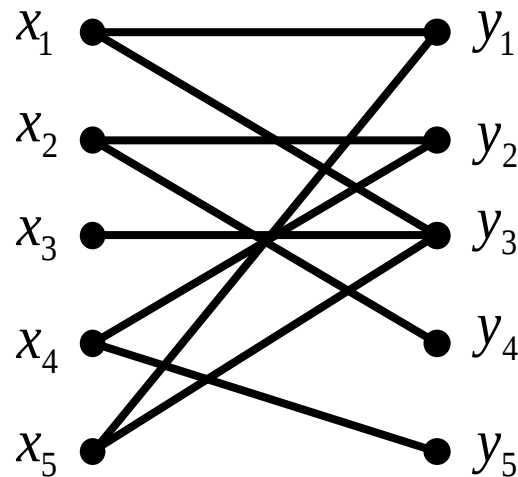
主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- **4.3 非平面图**
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式



非平面图

- 定义4.3.0 设 $G=(V,E)$ 是简单图，如果可把 V 划分为两个子集 X 、 Y ，其中 $X \cup Y = V, X \cap Y = \phi$ ，使得对任意边 $(u,v) \in E$ ，都有 $u \in X, v \in Y$ ，则称 G 为**二分图**，也称**二部图**。一般情况下，二分图 G 记为 $G=(X,Y,E)$





非平面图

- 定义4.3.0 如果图 G 不能嵌入平面，满足任意两边只在结点处相交，则称 G 为**非平面图**
 - 极大平面图中，任意添加一条边，就变成非平面图
 - 非极大平面图中，如果需要添加某条确定边 e ，但是 $G+e$ 也不能嵌入平面，则 $G+e$ 也是非平面图

问题：如何判别平面图和非平面图？



非平面图

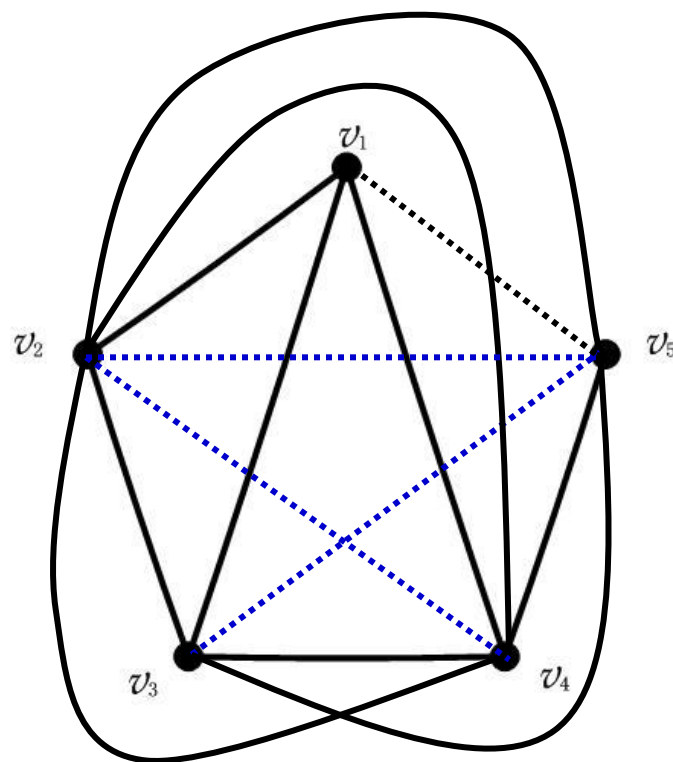
- 最简单的非平面图是什么？

- 从完全图考察起：

- K_3 ?

- K_4 ?

- K_5 ?



$K_5 - e$ 是可平面的！



非平面图

- 定理4.3.1 K_5 是非平面图!

证明:

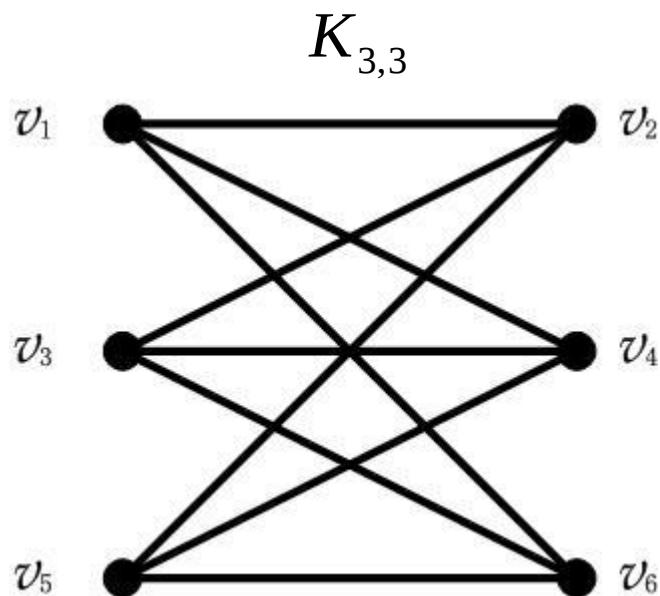
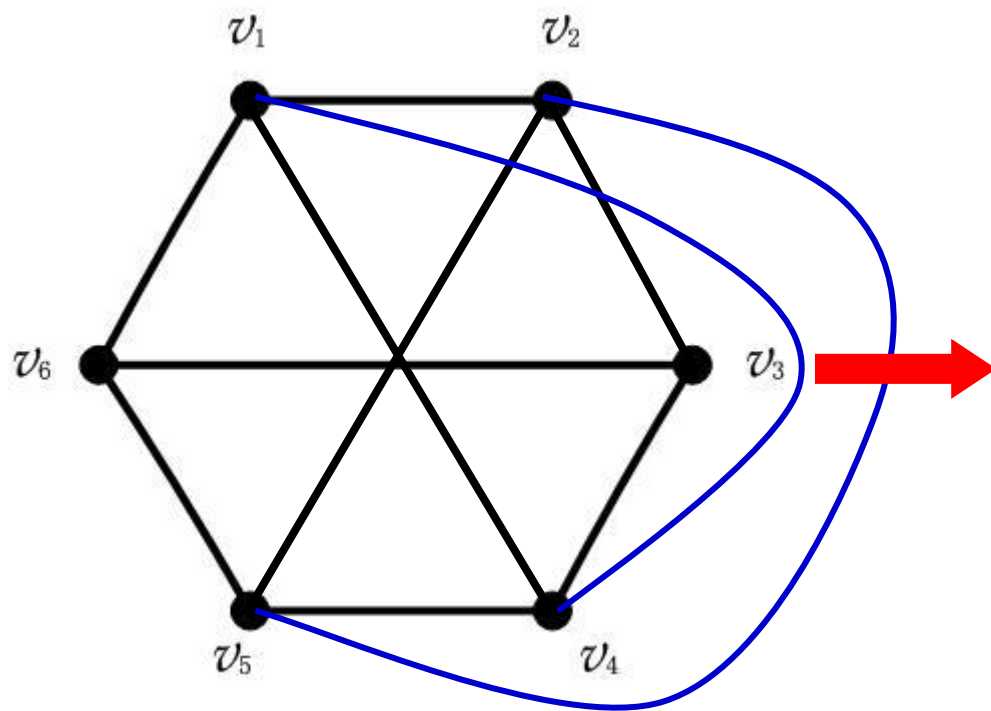
- 在 K_5 中, $n = 5$, $m = 10$
- 如它是平面图, 应有 $m \leq 3n - 6 = 15 - 6 = 9$
- 矛盾!

证毕!



非平面图

- 最简单的非平面图是什么？
 - K_5 是结点最少的非平面图！
 - 当结点为6时，边数最少的非平面图将是怎样？





非平面图

- 定理4.3.2 $K_{3,3}$ 是非平面图

证明（反证法）：

- 假设 $K_{3,3}$ 是平面图，则其 $n=6$, $m=9$

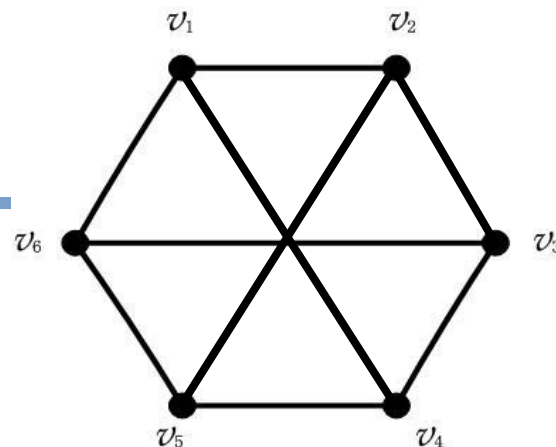
由欧拉公式可知其 $d=5$

- 观察，很容易发现其中没有三角形，即存在不等式 $4d \leq 2m$ ，即 $20 \leq 18$ ，矛盾！

证毕！

三家三井问题？ 无解！

K_5 和 $K_{3,3}$ 分别记为 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$ 图





非平面图

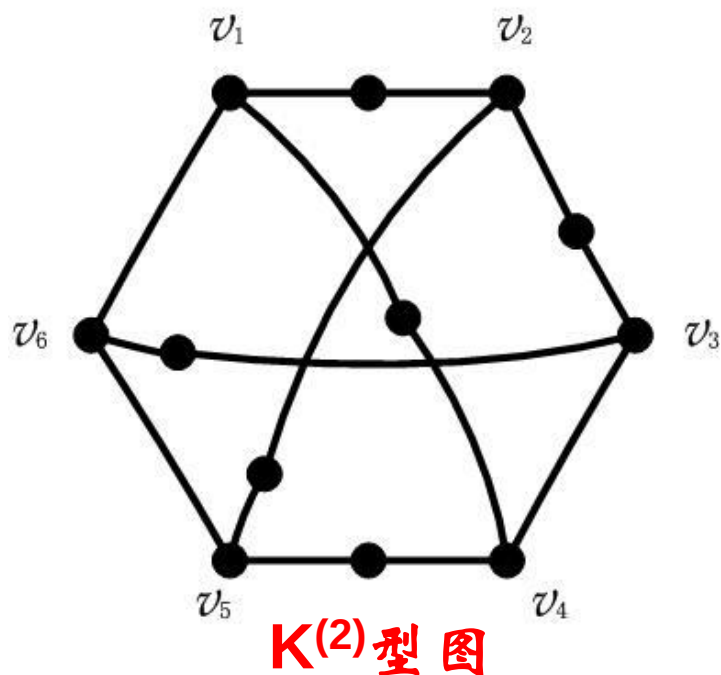
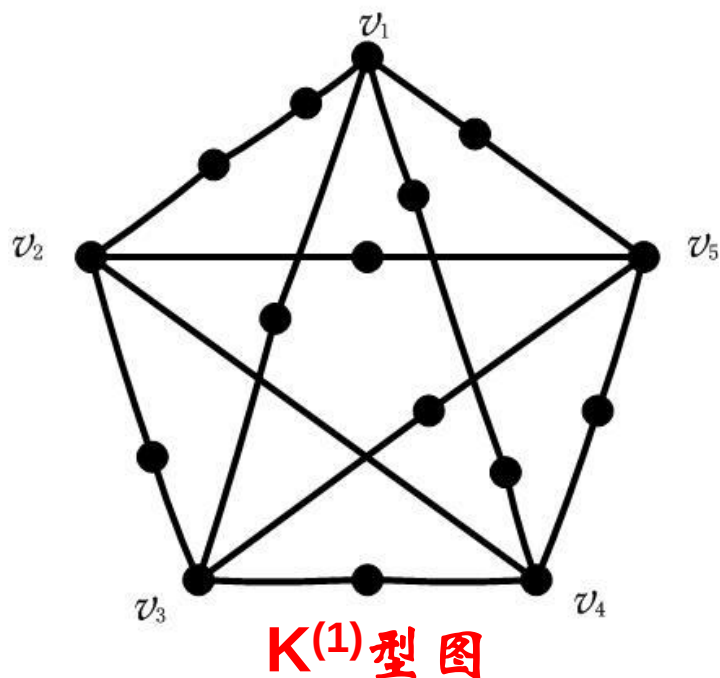
小结:

- 如果图结点数小于5，图一定是可平面的
- 如果图边数少于9，图一定是可平面的



非平面图

- 定义4.3.1 在 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$ 图上任意增加一些度为2的结点之后得到的图成为 $K^{(1)}$ 型和 $K^{(2)}$ 型图，统称为 K 型图。





非平面图

- 思考

- 如何用代数的方法判断 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$ 图?
- 对任何一个图如何用代数的方法判断其包含 $K^{(1)}$ 或 $K^{(2)}$ 子图?
- 如何用代数的方法判断 $K^{(1)}$ 型和 $K^{(2)}$ 型图?
- 对任何一个图如何用代数的方法判断其包含 $K^{(1)}$ 型或 $K^{(2)}$ 型子图?



非平面图

- 定理4.3.3 G 是可平面图的充要条件是 G 不存在 K 型子图
 - 库拉图斯基(Kuratowski)
 - 定理具有极高的理论价值，但是实践中，判断一个图是否具有 K 型子图是非常困难的。
 - 应该探索一种实用的平面图判别算法。



主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- **4.4 图的平面性检测**
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式



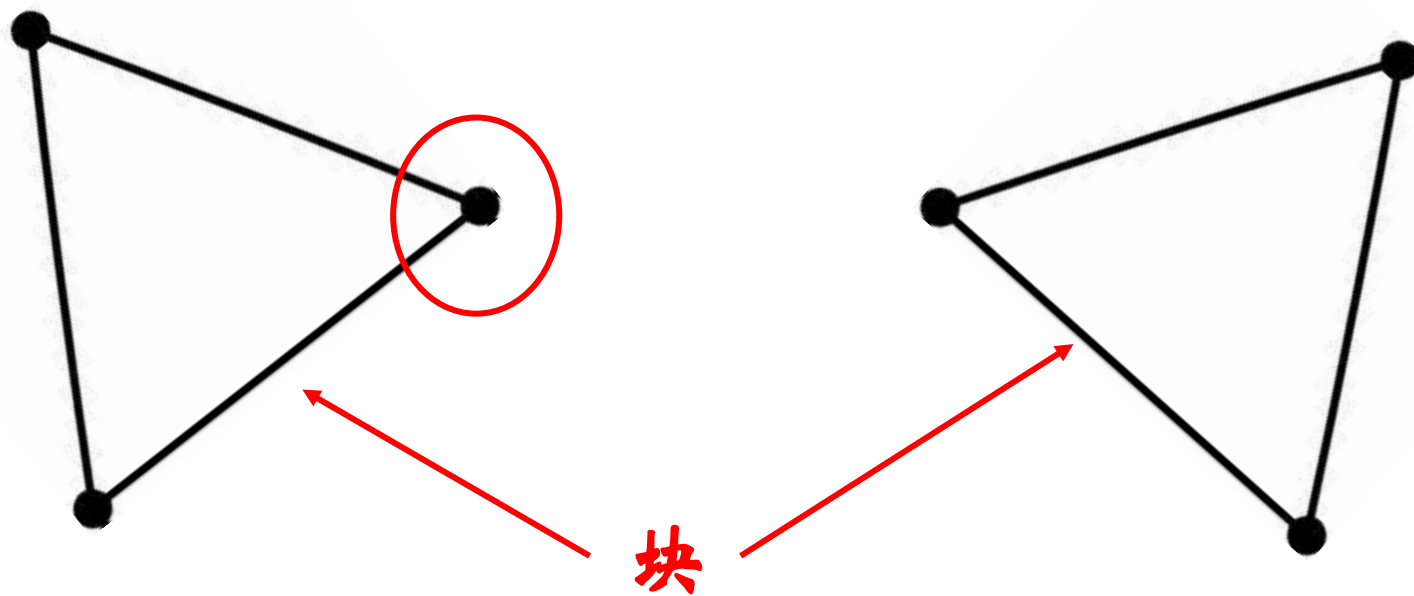
图的平面性检测

- 如何判断一个图的平面性？
 1. 如果图是非连通的
 - 分别检查每个连通支
 - 当所有的连通支都是可平面的，则 G 是可平面的
 2. 如果图中存在自环
 - 移去自环



图的平面性检测

- 如果图 G 中存在割点，此时可以把图 G 从割点处分离，构成若干个不含割点的连通子图（块），然后检测每一块的平面性。





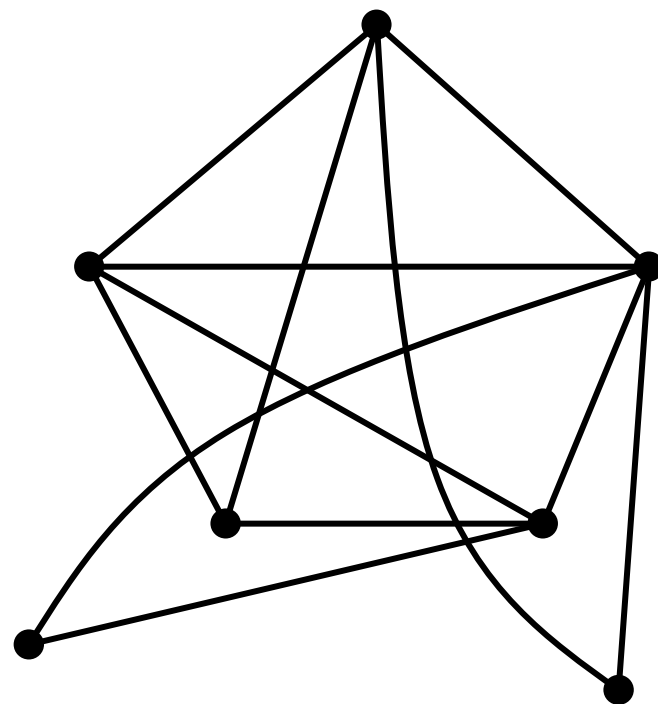
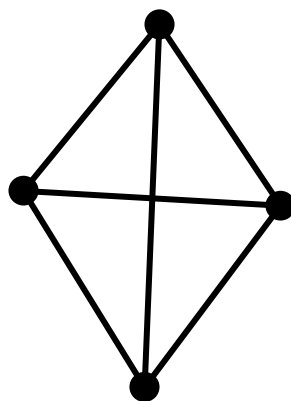
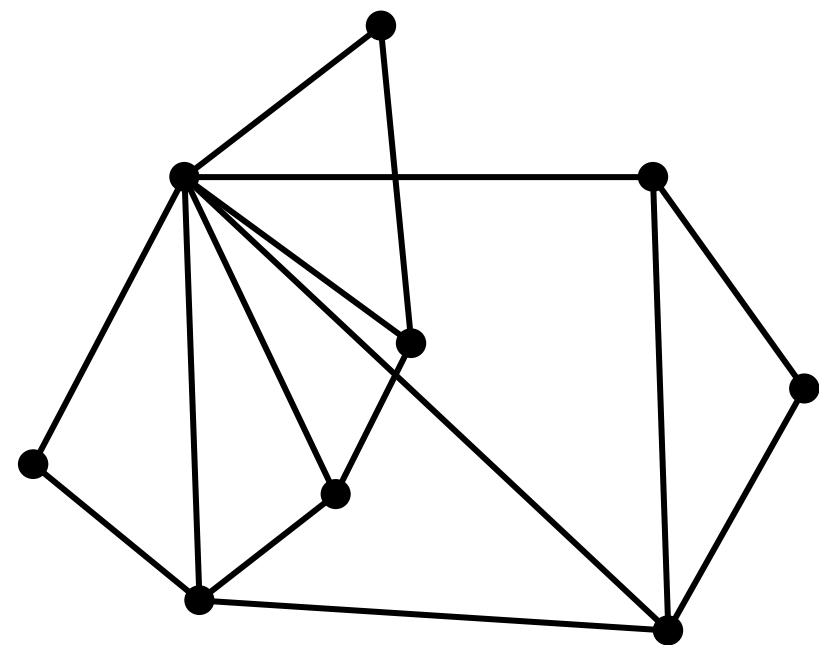
图的平面性检测

4. 移去度为2的结点及其所关联的边，而在它两个邻点之间加入边。显然原图是可平面的，当且仅当新图是可平面的。
5. 移去重边
6. 反复运用4和5，最后如果：
 - a) $m < 9$ 或 $n < 5$ ，则G为可平面的
 - b) $m > 3n - 6$ ，则G是非平面的
 - c) 不满足a和b，需要进一步测试

连通自环分割点
删度为2去重边

例：

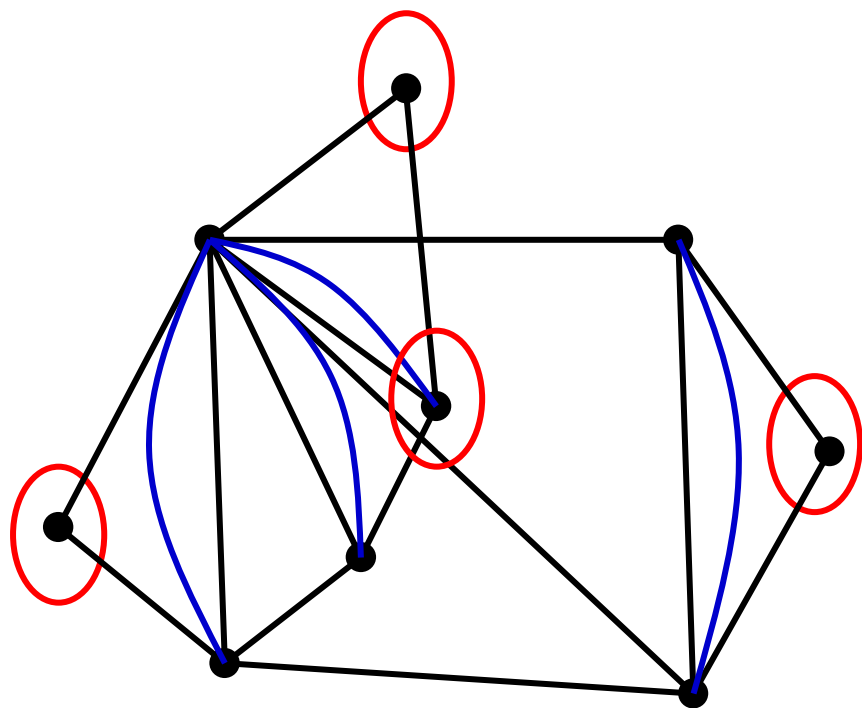
连通自环分割点



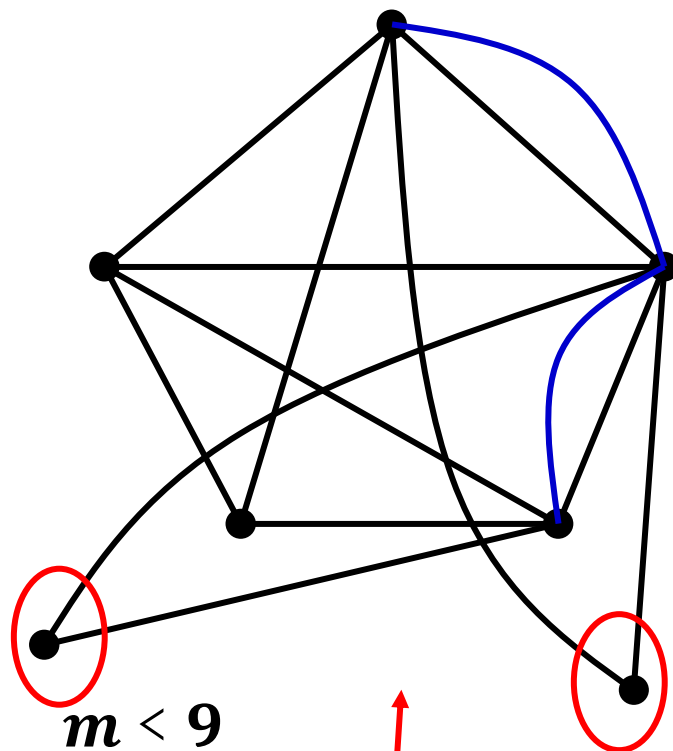
可平面！

例：

删度为2去重边



可平面！



可平面！



图的平面性检测

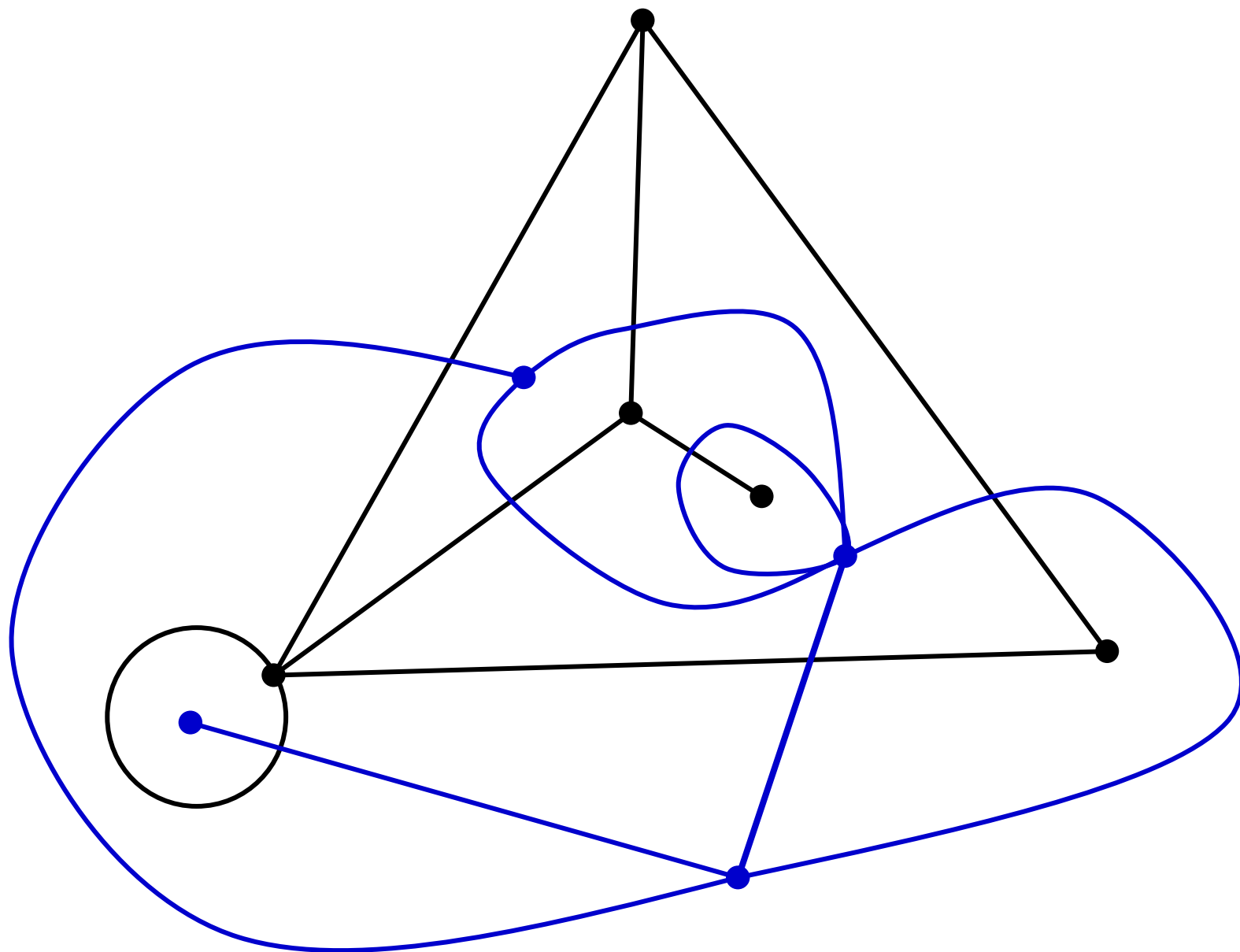
- 如果不满足条件a和b, G 的平面性仍不能断定, 需要进一步检测。
- 如何检测?
- DMP算法 (自学)
 - Demoucron Malgrange Pertuiset



主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- **4.5 对偶图**
- 4.6 色数与色数多项式

例：





对偶图

• 定义4.5.1 满足下列条件的图 G^* 称为 G 的对偶图

1. G 中每个确定的域 f_i 内设置一个结点 v_i^*

2. 对域 f_i 和 f_j 的共同边界 e_k ，有一条边

$e_k^* = (v_i^*, v_j^*) \in E(G^*)$ ，并与 e_k 相交一次

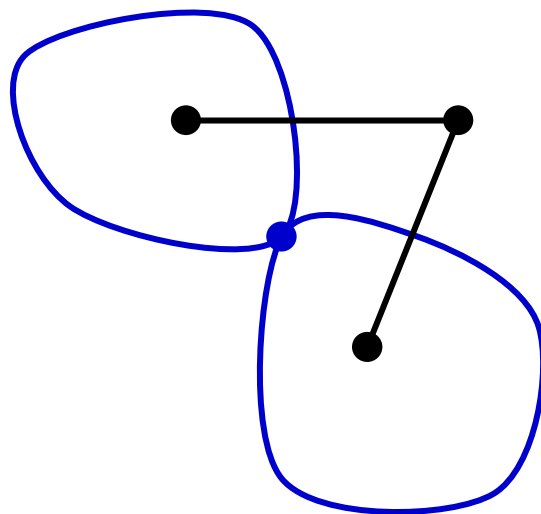
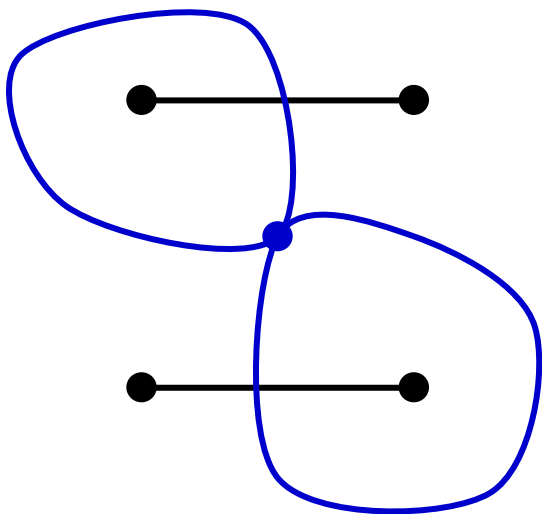
3. 若 e_k 处于域 f_i 之内，则 v_i^* 有一自环 e_k^* 与 e_k 相交一次

显然，这个定义也是求对偶图的方法，称为D(drawing)过程



对偶图

- 性质4.5.1 如果 G 为平面图， G 一定有对偶图 G^* ，而且 G^* 是唯一的。
- 性质4.5.2 G^* 是连通图
- 性质4.5.3 若 G 为平面连通图，那么 $(G^*)^* = G$





对偶图

- 性质4.5.4 平面连通图 G 与其对偶图 G^* 的结点、边和域之间存在如下对应关系

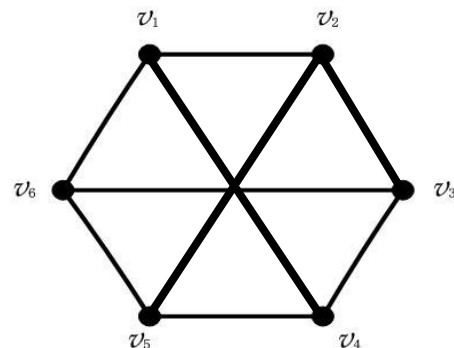
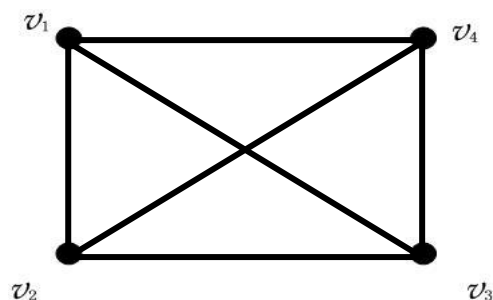
$$m = m^* \quad d = n^* \quad n = d^*$$

- 性质4.5.5 设 C 是平面图 G 的一个初级回路, S^* 是 G^* 中与 C 的各边 e_i 对应的 e_i^* 的集合, 那么 S^* 是 G^* 的一个 割集



对偶图

- 思考：
 - 什么样的图有对偶图？



- 定理4.5.1 G 有对偶图的充要条件是
 G 为平面图



对偶图

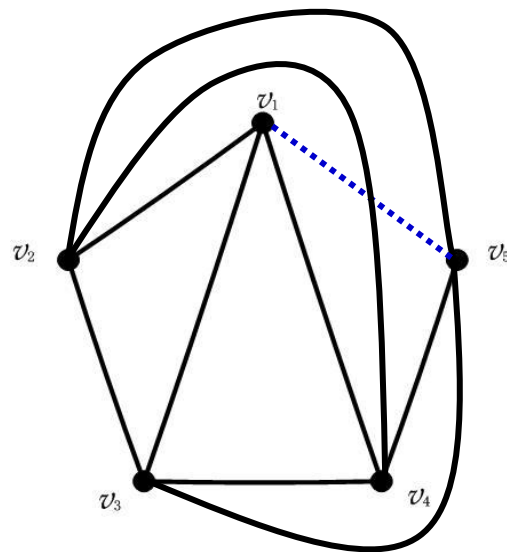
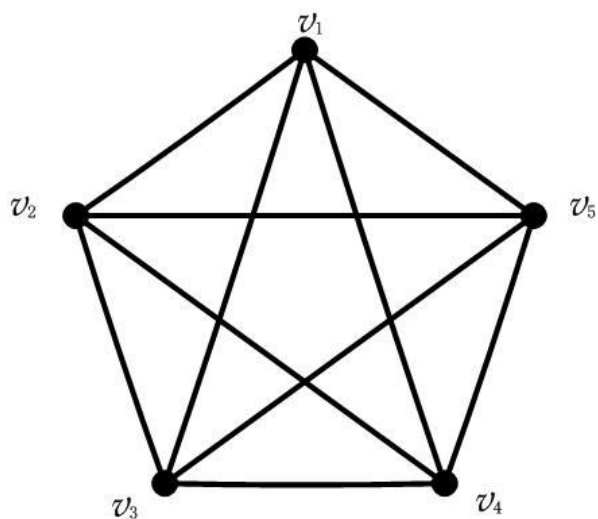
- 证明:

- 充分性据性质4.5.1即得。证必要性(反证法):
- 假设 G 为非平面图。则根据库拉图斯基定理, G 中一定包含 $K^{(1)}$ 或 $K^{(2)}$ 型子图
- 根据对偶图的生成原则, 度为2的结点不影响对偶图的存在性(只会在对偶图中增加重边), 因此, 所有 K 型子图是否存在对偶图, 都可以归结为 $K^{(1)}$ 或 $K^{(2)}$ 图是否存在对偶图问题。



对偶图

- 对于 $K^{(1)}$ 图: $m = 10$, $n = 5$, $d \geq 7$; 则其对偶图中, $m^* = 10$, $n^* \geq 7$
- 由于 $K^{(1)}$ 图中不存在自环和重边, 所以其对偶图中不存在度为1或2的结点, 即 $d(v_i^*) \geq 3$
- 故 $2m^* = \sum d(v_i^*) \geq 3 \times 7$, 矛盾!

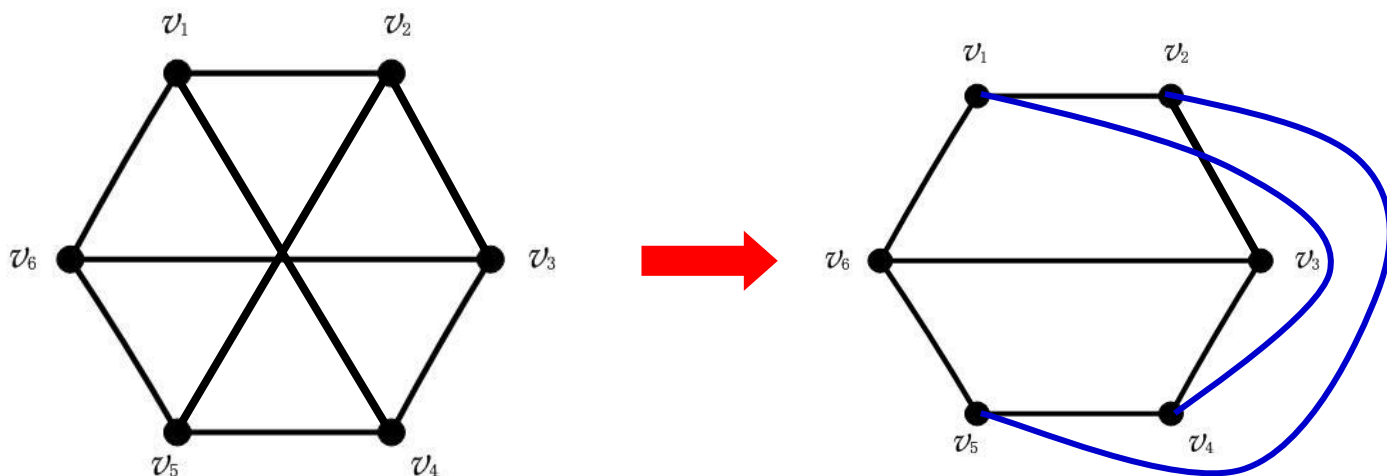




对偶图

- 对于 $K^{(2)}$ 图: $m=9$, $n=6$, $d \geq 5$; 则其对偶图中, $m^*=9$, $n^* \geq 5$
- 由于 $K^{(2)}$ 图中每个域的边界数至少为4, 所以其对偶图中结点度不小于4, 即 $d(v_i^*) \geq 4$
- 故 $2m^* = \sum d(v_i^*) \geq 4 \times 5$, 矛盾!

证毕!



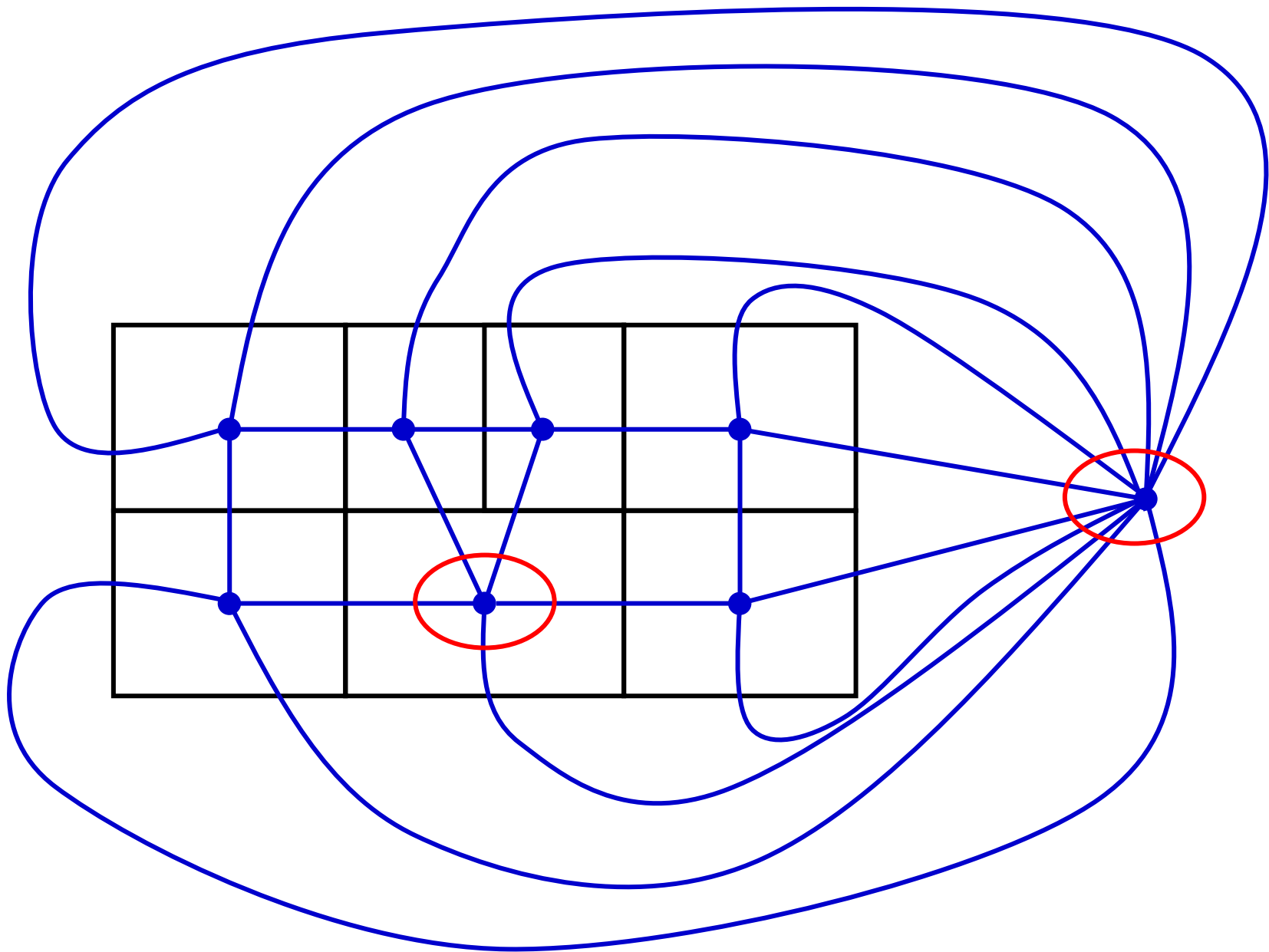


对偶图

- 思考：
 - 什么样的图有对偶图？

平面图！

问能否从某个房间开始过每扇门一次最后返回?





对偶图

- 例：任何一张地图是否只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色？

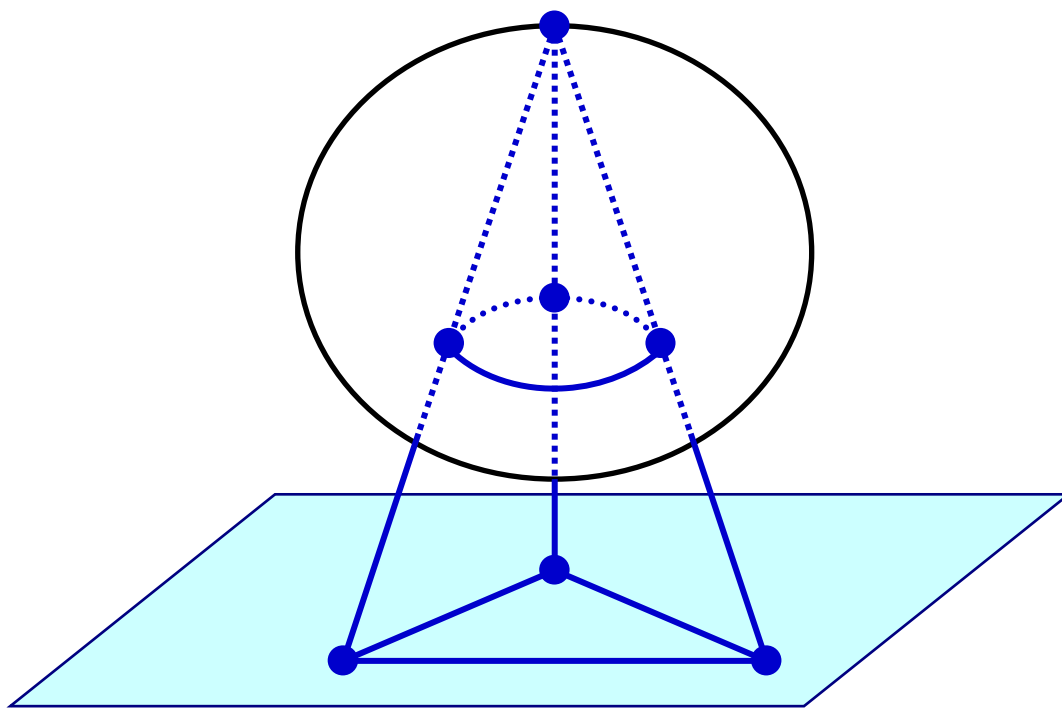
(四色问题)

- 地图无“飞地”
- 两个国家只有共同点不算具有共同边界



对偶图

- 测地变换：可球面图 $\longleftrightarrow$ 可平面图





对偶图

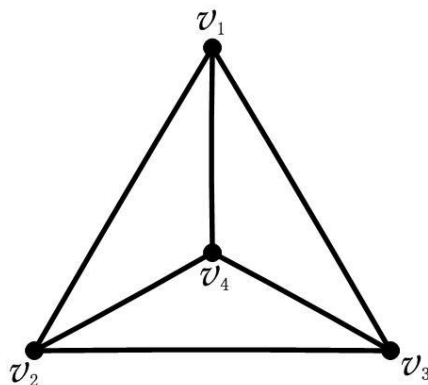
- 测地变换说明地图是可平面图
- 对于可平面图着色问题，一般都是做图的对偶图，然后研究对偶图的点着色问题
- 四色问题转化为：对一个连通的平面图，是否可以用4种颜色对其结点进行着色，并保证相邻结点颜色不同？



对偶图

- 问题：

- 对于一个连通的平面图，3种颜色是否可以完成结点着色，并使相邻结点颜色不同？



3种颜色不可以！

- 那么5种颜色是否够用呢？



对偶图

- 定理4.5.2 每一个平面图 G 都是5-可着色的
证明：
 - 作 G 的对偶图 G^* ，则命题转为证 G^* 的结点5-可着色
 - 对偶图有时会出现自环和重边，由于自环和重边并不影响点5-可着色问题，因此，可将自环和重边移去得到简单图 G_0
 - 则命题又转为证任意简单图是否可以结点5着色



对偶图

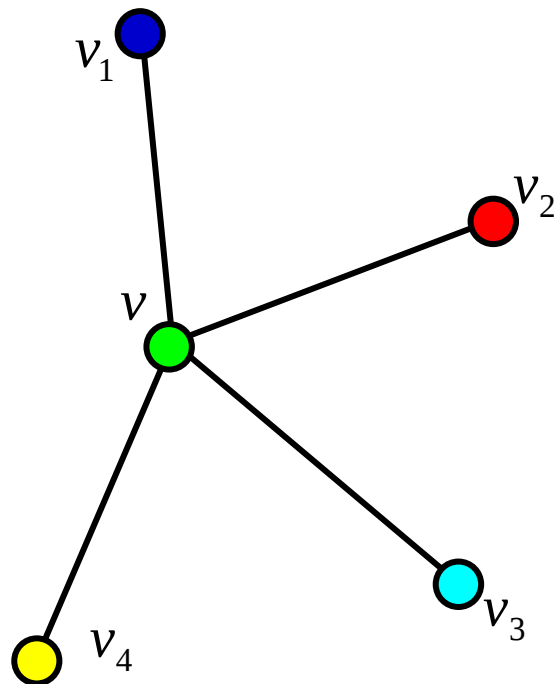
- 证明（续）：以下对 G_0 的结点进行归纳证明
- (1) 当结点数 $n \leq 5$ 时，显然可5着色，结论成立。
- (2) 设结点数为 $n-1$ 时 G_0 可结点5着色



定理4.2.2 简单平面图 G 中存在度小于6的结点

对偶图

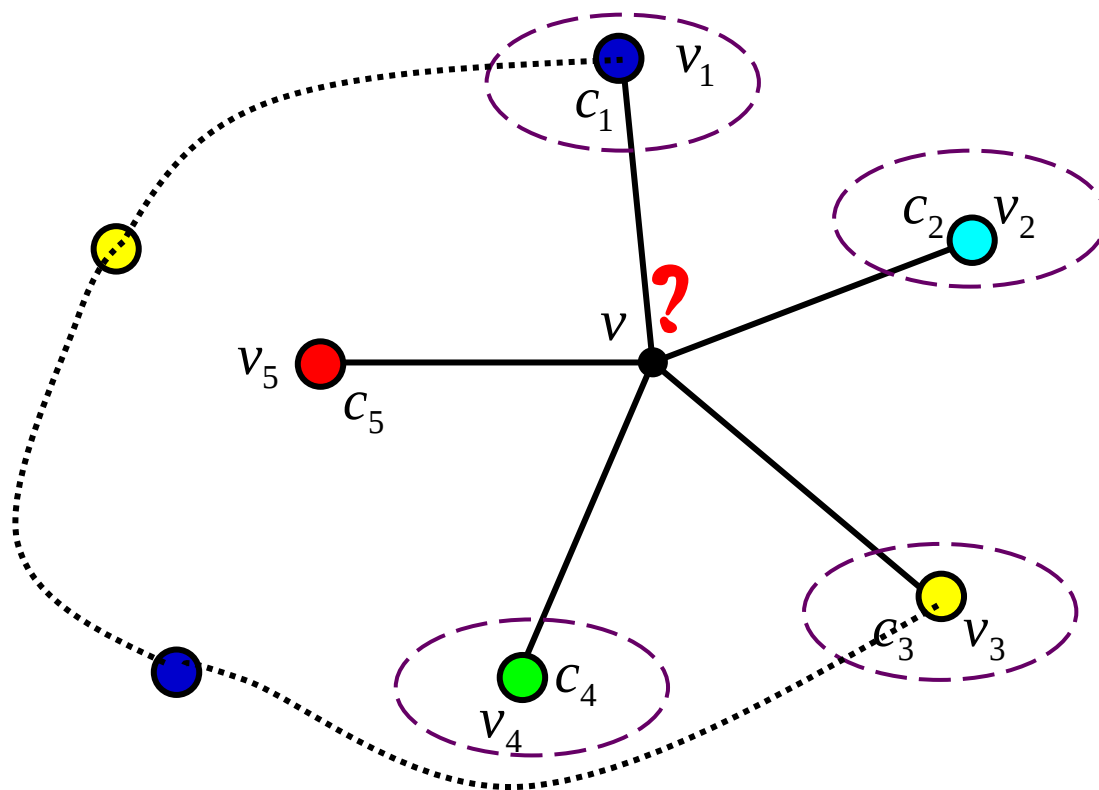
- (3) 当结点数为 n 时, 由于 G_0 为简单图, 据定理4.2.2可知, G_0 中一定存在结点 v , $d(v) < 6$
- 如果 v 的度小于5, 此时移去 v , 得到 G_0' , 据归纳假设, G_0' 可点5着色。再将 v 补回, 恢复到 G_0 。则图可结点5着色。





对偶图

- 如果结点 v 的度正好为5, 如图所示
- 假如相邻结点只用了4种颜色(或更少), 则OK;
- 假如相邻结点偏偏用了5种颜色





对偶图

针对 C_1, C_3 形成的子图：

- 如果 v_1, v_3 属不同的连通支，则将 v_1 所在连通支中 C_1 和 C_3 颜色互换
 - 如果 v_1, v_3 属同一连通支，则 v_1 和 v_3 之间存在道路，与 v 一起形成回路，此时 C_2 和 C_4 形成的子图中， v_2 与 v_4 一定分属两个连通支，则将 v_2 所在连通支中 C_2 和 C_4 颜色互换
- 因此对于结点数为 n 的情况，5种颜色仍然可以完成结点着色。

证毕！



对偶图

- 小结：
 - 对于平面图，3种颜色不可以完成结点着色
 - 对于平面图，已证明，5种颜色可以完成结点着色
 - 那么，对于平面图，4种颜色可不可以完成结点着色？
- 四色问题又称四色猜想，是世界近代三大数学难题之一



主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- **4.6 色数与色数多项式**

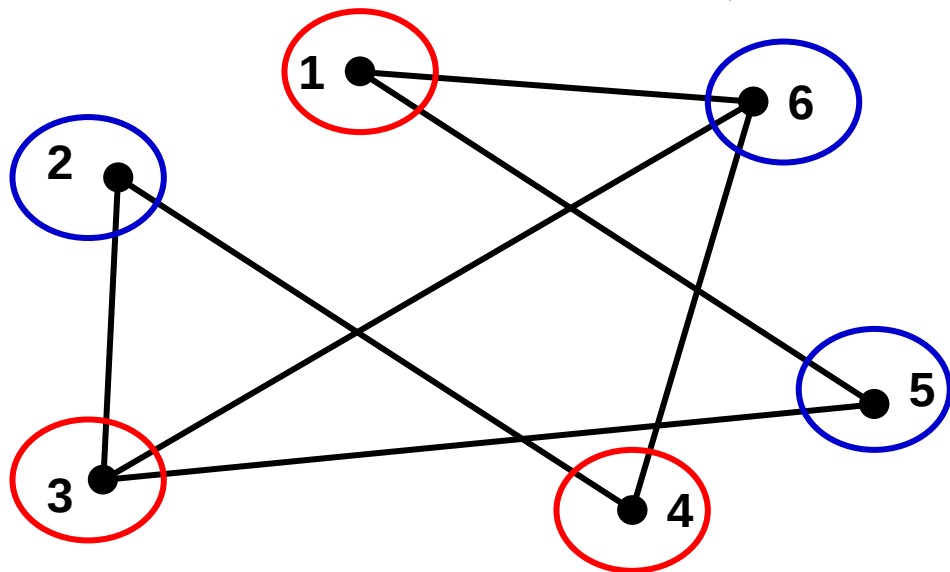


色数与色数多项式

问题背景：

- 药品贮存问题：

— 有 n 种化学药品需要存放，但是由于个别药品相互之间会发生化学反应，因此需要存放在不同的地点。问至少需要多少存放地点？



对图 G 的结点进行着色
满足相邻节点着以不同颜色
最少颜色数！

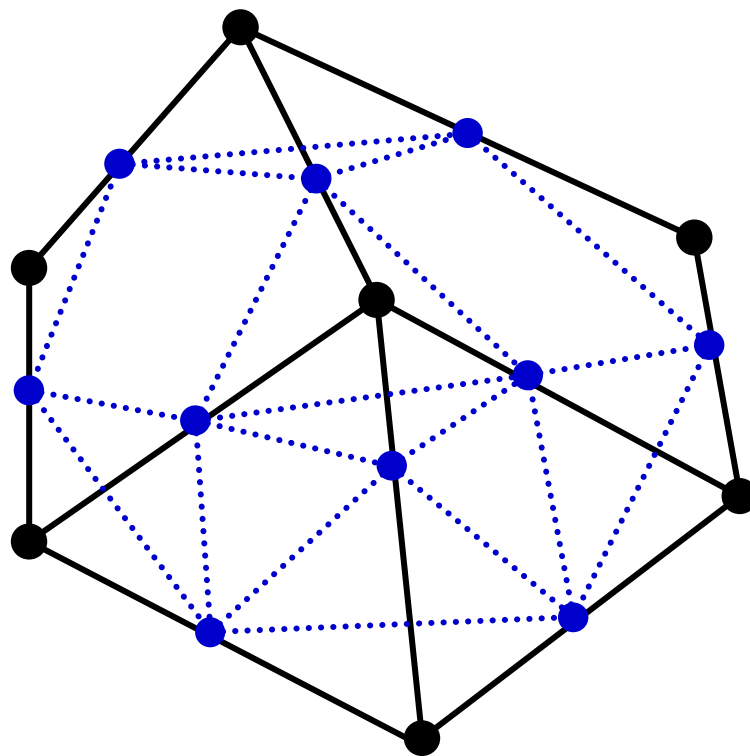


色数与色数多项式

- 定义4.6.1 给定图 G ，满足相邻结点着以不同颜色的最少颜色数目称为 G 的色数，记为 $\gamma(G)$
- 定义4.6.2 给定图 G ，满足相邻边着以不同颜色的最少颜色数目称为 G 的边色数，记为 $\beta(G)$



色数与色数多项式



平面图的边着色问题，可转化为点着色问题研究



色数与色数多项式

- 一些常见图的色数：
 - 空图： $\chi(G)=1$
 - 完全图： $\chi(G)=n$
 - $G = K_n - e$: $\chi(G)=n-1$
 - 二分图： $\chi(G)=2$
 - 偶结点数回路： $\chi(G)=2$
 - 奇结点数回路： $\chi(G)=3$
 - 树($n \geq 2$): $\chi(G)=2$



色数与色数多项式

- 思考：
 - 子图的色数 $\leq$ 原图的色数
 - 图如果是连通图，则其色数必定 ≥ 2



色数与色数多项式

- 定理4.6.1 一个非空图 G , $\chi(G) = 2$ 当且仅当它没有奇回路

证明:

- 不妨设图 G 为连通图
- 必要性: $\chi(G) = 2 \longrightarrow$ 没有奇回路
- 假如存在奇回路, 则 $\chi(G) \geq 3$
- 充分性: 没有奇回路 $\longrightarrow \chi(G) = 2$



色数与色数多项式

- 对于图 G 的支撑树 T ，有 $\gamma(T) = 2$
- 考察每条余树边
- 在 T 中，加入任一余树边都可以形成一条初级回路，据已知条件，该回路为偶回路
- 因此，所有余树边加入后，树 T 的染色方案不需改变
- 故 $\gamma(G) = 2$

证毕！



色数与色数多项式

- 定理4.6.1 一个非空图 G , $\chi(G) = 2$ 当且仅当它没有奇回路



色数与色数多项式

- 定理4.6.2 对于任意一个图 G ，设 $d_0 = \max d(v_i)$ ，
则
$$\gamma(G) \leq d_0 + 1$$

证明：（归纳法）

- 当图 G 结点数 n 为1时，显然成立
- 设结点数 $n = k - 1$ 时成立
- 则当结点数 n 为 k 时，从图 G 中随意移去一个结点 v ，得到图 G' 。则根据归纳假设， $\gamma(G') \leq d'_0 + 1$

其中， $d'_0 = \max_{v_i \in G'} d(v_i)$



色数与色数多项式

- 显然, $d'_0 \leq d_0$ 故 $\gamma(G') \leq d'_0 + 1 \leq d_0 + 1$
- 说明用 $d_0 + 1$ 种颜色可以给 G' 结点着色
- 此时, 我们把删掉的结点 v 补回
- 结点 v 的度不会超过 d_0 , 而我们有 $d_0 + 1$ 种颜色可用, 因此结点 v 一定可以在这 $d_0 + 1$ 种颜色中找到着色方案。
- 故 $n = k$ 时, 假设仍然成立。

证毕!



色数与色数多项式

- 定理4.6.2 对于任意一个图 G , 设 $d_0 = \max d(v_i)$, 则

$$\chi(G) \leq d_0 + 1$$



色数与色数多项式

- 定理4.6.3 对任意图 G , $\chi(G) \leq 1 + \max_{G' \subseteq G} \delta(G')$, 其中 $\delta(G')$ 表示 G 的导出子图 G' 中最小的结点度
- 证明:
- 若 G 为空图, 则结论显然成立
 - 若 G 非空, 则设 $\chi(G) = k$, 必然有 $k \geq 2$.
 - 令 H 为满足 $\chi(H) = k$ 的 G 的一个最小导出子图
 - 则对于 H 的所有结点 v , 必然有 $\chi(H - v) = k - 1$
 - 意味着 H 中每个结点 v , 都至少有 $k - 1$ 个邻接点

?



色数与色数多项式

- 即 $d(v) \geq k - 1$, 可知 $\delta(H) \geq k - 1$
- 对于 H 的所有导出子图 $\{H'\}$, 必有 $\delta(H) \leq \max \delta(H')$
- 而相比 G 的所有导出子图 $\{G'\}$, 必有

$$\text{max } \delta(H') \leq \text{max } \delta(G')$$

- 由上述各不等式, 可推出

$$\chi(G) = k \leq 1 + \delta(H) \leq 1 + \max \delta(H') \leq 1 + \max \delta(G')$$

证毕!



色数与色数多项式

定理4.6.3 对任意图 G , $\chi(G) \leq 1 + \max_{G' \subseteq G} \delta(G')$, 其中

$\delta(G')$ 表示 G 的导出子图 G' 中最小的结点度

思考:

给定一个图 G , 如何求其色数?

给出图 G 的两个变换: $\overline{G_{ij}}$ G_{ij}°



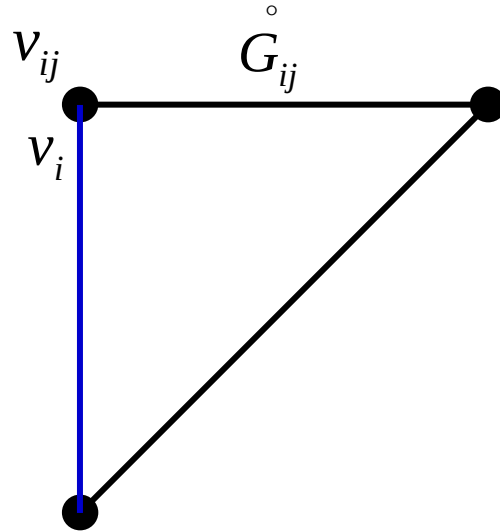
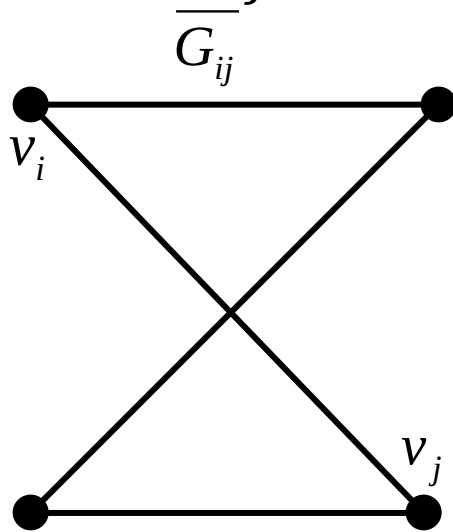
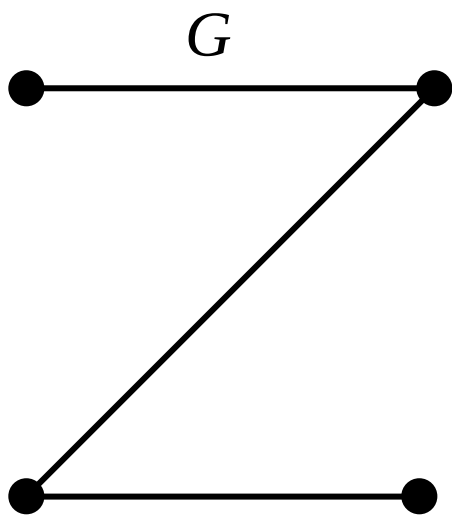
色数与色数多项式

- 定义4.6.3 设 v_i, v_j 是简单图 G 中不相邻的两个结点。

令 $\overline{G_{ij}} = G + (v_i, v_j)$

。
 $\overline{G_{ij}}$ 为原图 G 中合并结点 v_i, v_j 成为新结点 v_{ij}

并由 v_{ij} 继承原先 v_i, v_j 连接关系的简单图。





色数与色数多项式

- 思考：

- 联系 $\overline{G_{ij}}$, G_{ij}° 的定义，简单图 G 的最少着色数可如何计算？

- $\overline{G_{ij}}$ ：原图 G 中， v_i, v_j 着以不同颜色

$$\gamma(\overline{G_{ij}}) = \gamma(G(v_i, v_j \text{ 着以不同颜色}))$$

- G_{ij}° ：原图 G 中， v_i, v_j 着以相同颜色

$$\gamma(G_{ij}^\circ) = \gamma(G(v_i, v_j \text{ 着以相同颜色}))$$



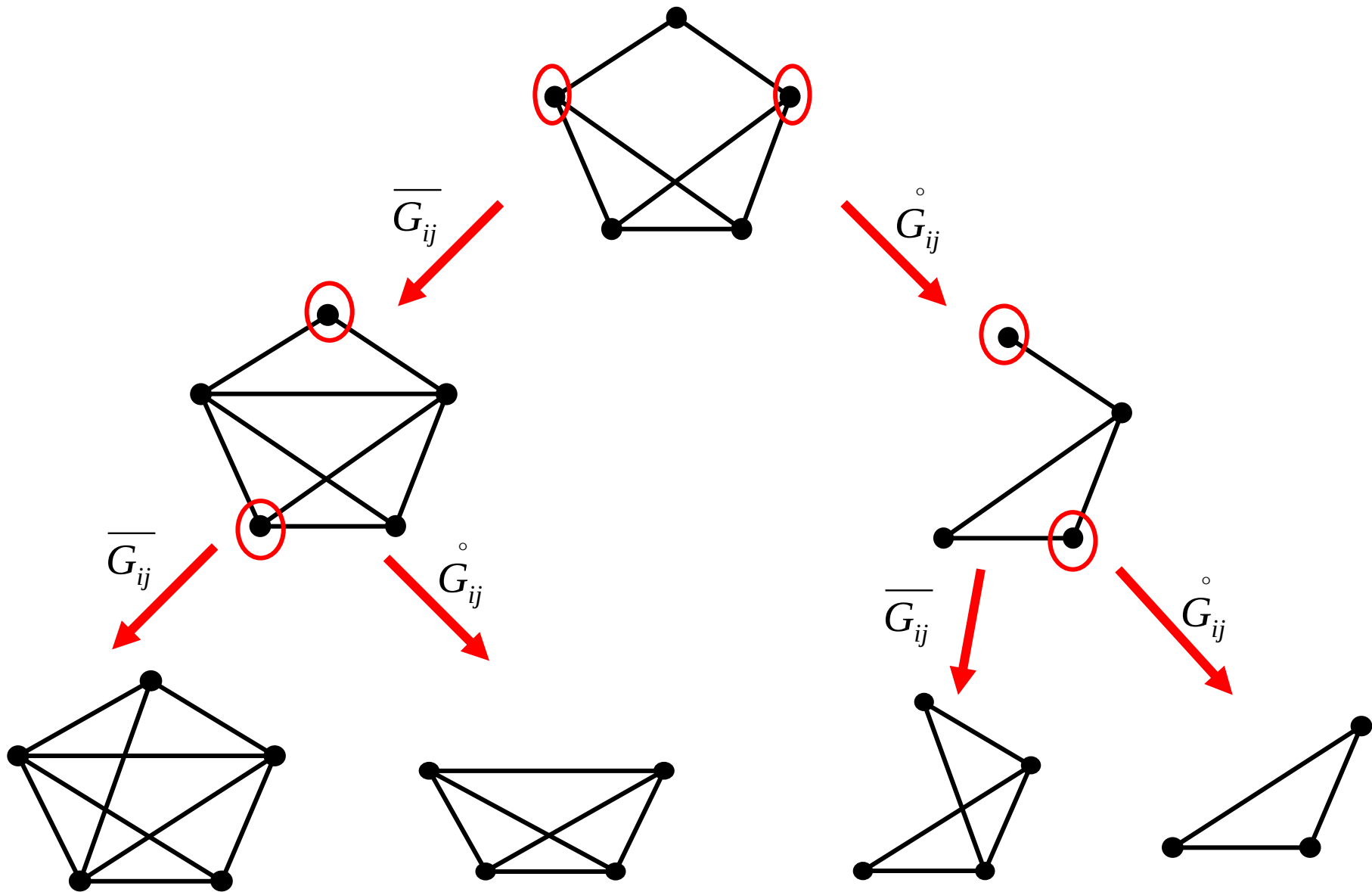
色数与色数多项式

- 定理4.6.4 设 v_i, v_j 是简单图 G 中不相邻的两个结点。则

$$\chi(G) = \min \left\{ \chi(\overline{G_{ij}}), \chi(G_{ij}^\circ) \right\}$$

证明：

略！



$$\gamma(G) = \min \left\{ \gamma(\overline{G_{ij}}) , \gamma(G_{ij}^\circ) \right\} = \mathbf{3}$$

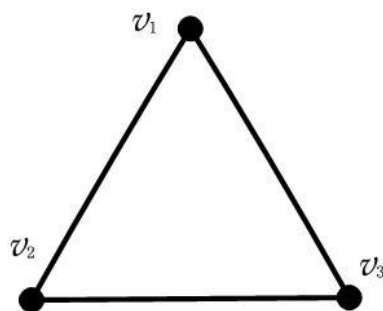


色数与色数多项式

- 色数问题，是给一个图结点着色，所需的最少颜色数
- 假如给定颜色数 t ，对某个图 G 结点进行着色，问有多少种方案？

我们用 $f(G, t)$ 表示这种着色方案数

— 例如： t 种颜色 ($t \geq 3$) 对 K_3 进行着色，方案数为：



$$f(K_3, t) = t(t-1)(t-2)$$



色数与色数多项式

- 定义4.6.4 对于简单图 G ，给定 t 种颜色对 G 的结点进行着色，满足相邻结点着以不同颜色，着色方案数可用 $f(G, t)$ 表示，称为 G 的色数多项式。

— 显然，当给出的颜色数不够多时，着色方案数将为0，即

$$t < \gamma(G) \quad \longrightarrow \quad f(G, t) = 0$$



色数与色数多项式

- 对于图G的色数多项式 $f(G, t)$
 - 用 t 种颜色对G进行着色，可以分为如下情况：
 - 恰用1种颜色完成着色，着色方案数为 m_1 ，选色方案数为 C_t^1
 -
 - 恰用 n 种颜色完成着色，着色方案数为 m_n ，选色方案数为 C_t^n

– 则有：

$$f(G, t) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot C_t^i$$

由此可看出，色数多项式是一个 t 的 n 次多项式



色数与色数多项式

- 常见的色数多项式及其性质：

- $\gamma(G)=k \Rightarrow f(G,k)>0$

- $f(G,t)=t^n \Leftrightarrow G$ 为空图

- 对于完全图 K_n , $f(K_n,t)=t(t-1)\cdots(t-n+1)$

$$f(K_n,t) = f(K_{n-1},t)(t-n+1)$$

- 对于树 T_n , $f(T_n,t)=t(t-1)^{n-1}$

- 若 G 有 p 个连通支 $G_1, G_2, \dots, G_p, p \geq 1$, 则

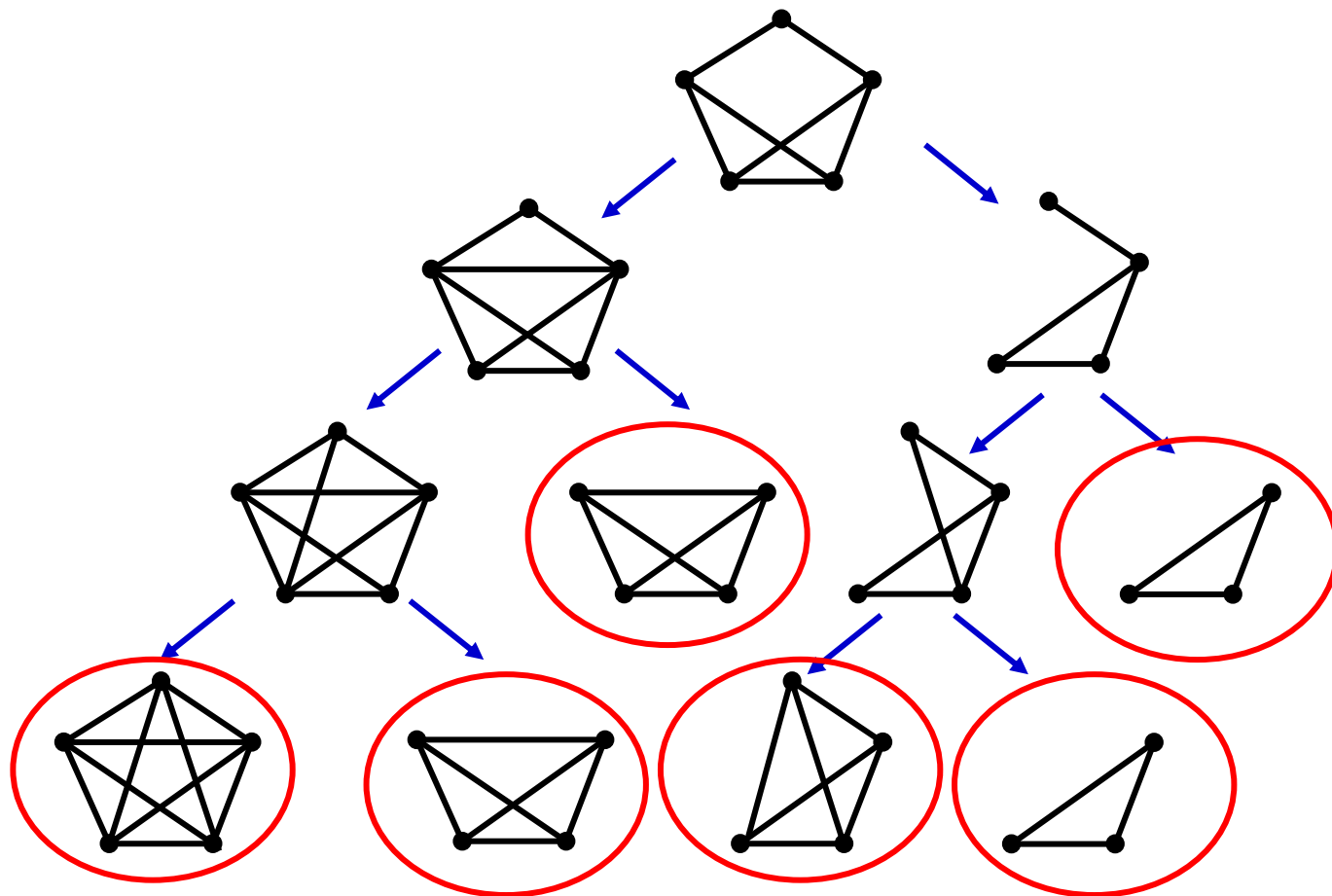
$$f(G,t) = \prod_{i=1}^p f(G_i,t)$$



色数与色数多项式

- 思考：
 - 对于任意平面图，其色数多项式如何计算？
- 定理4.6.7 设 i, j 是 G 的不相邻结点，则

$$f(G, t) = f(\overline{G_{ij}}, t) + f(\overset{\circ}{G_{ij}}, t)$$



$$f(G,t) = f(K_5,t) + 3 \cdot f(K_4,t) + 2 \cdot f(K_3,t)$$



小结

- 色数问题：
 - 色数的定义、常见图的色数
 - 图的色数定理
 - 图的色数求解方法
- 色数多项式：
 - 常见图的色数多项式
 - 色数多项式的求法



主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式



作业

- 课后：1, 3, 16, 17, 24
- 选作：5, 20, 25, 27