



第七章

代数结构基本知识 I

计算机系网络所：张小平



主要内容

- 7.1 集合与映射
- 7.2 等价关系
- 7.3 代数系统的概念
- 7.4 同构与同态



集合与映射

- 设 S 是任意一个集合，如果元素 a 属于 S ，记记为 $a \in S$ ，否则记 $a \notin S$ 。
- S 中不同元素的个数称为该集合的**基数**，用 $|S|$ 表示。
- 当集合 S 确定之后，能相应地得到另一个集合 $\rho(S)$ ， $\rho(S)$ 是 S 的全部子集的集合。
的**幂集**
- $\rho(S)$ 的基数是 $2^{|S|}$



集合与映射

- $\rho(S)$ 中的元素 A , 是集合 S 的一个子集, 可以刻划为

$$A = \{x \in S \mid P(x)\}$$

其中 P 代表某种性质

- 因此 A 可以解释为: 具有性质 P 的 S 的元素的集合



集合与映射

- 集合运算：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

分配律！



集合与映射

- 定义7.1.1 设 S 和 T 是给定的两个集合，如果有一个规则 f ，使对任意一个元素 $x \in S$ ，在 T 中有唯一的元素 y 与之对应。则称 f 是 S 到 T 的一个映射

记作 $f: S \rightarrow T$ 和 $y = f(x)$ ， S 称为 f 的定义域， T 为 f 的值域， y 称为 x 的象， x 称为 y 的原象。



集合与映射

- 根据定义：
 - S 中每个元素在 T 中都有象
 - T 中的每个元素在 S 中不一定都有原象
 - 习惯上我们将 S 中全部元素的象所构成的集合称为 f 的象，记作 $f(S)$ 。显然 $f(S) \subseteq T$ 。



集合与映射

- 定义7.1.2 两个映射 f, g

$$f: A_1 \rightarrow B_1$$

$$g: A_2 \rightarrow B_2$$

当且仅当 $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, 且对任意 $x \in A$,

都有 $f(x) = g(x)$, 称 f 和 g 是相等的映射,

记为 $f = g$

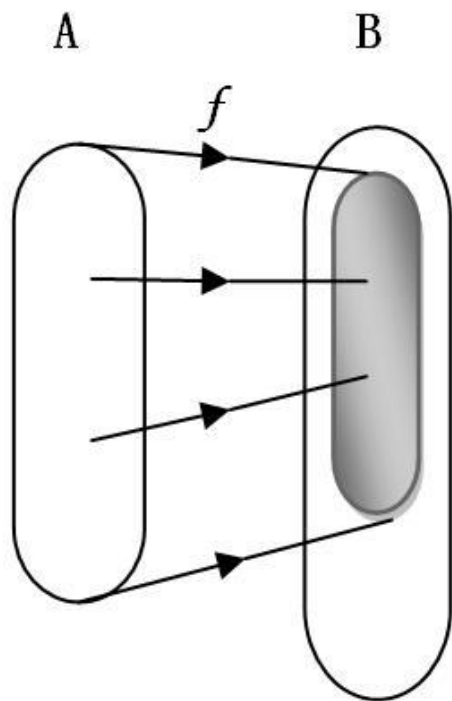


集合与映射

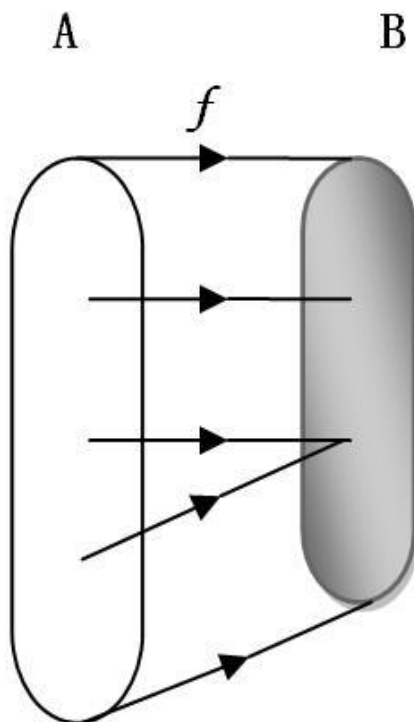
- 定义7.1.3 设 f 是 A 到 B 的一个映射。
 1. 若对任意 $a_i \neq a_j, a_i, a_j \in A$, 都有 $f(a_i) \neq f(a_j)$, 称 f 是 A 到 B 的 **单射**。
 2. 若 $f(A) = B$, 则称 f 是 A 到 B 的 **满射**。
 3. 若 f 既是单射又是满射, 则称它是 A 到 B 的 **双射**。



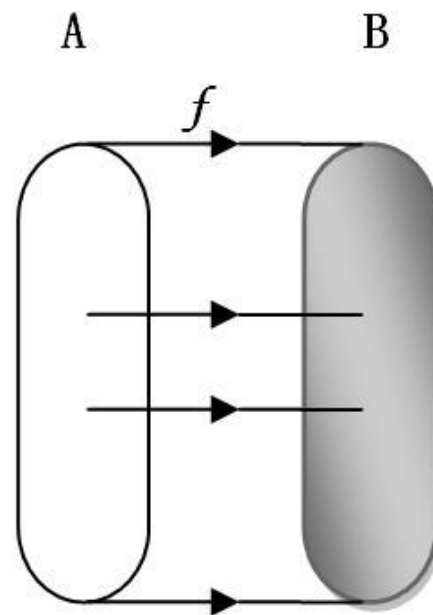
集合与映射



单射



满射



双射



集合与映射

- 定义7.1.4 设 A 、 B 、 C 是三个集合，有两个映射：

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

则由 f 和 g 可确定一个 A 到 C 的映射 h ,

$$h: a \rightarrow g(f(a))$$

称 h 为 f 与 g 的**合成**，记作 $h = gf$ ，亦即

$$h(a) = (gf)(a) = g(f(a))$$

$$gf(a) = g(f(a))$$



集合与映射

- 映射的合成一般不满足交换律，
但是满足结合律。

例如： $\alpha: A \rightarrow B$, $\beta: B \rightarrow C$, $\gamma: C \rightarrow D$

$$\gamma(\beta(\alpha(a))) = (\gamma\beta)(\alpha(a)) = \underline{((\gamma\beta)\alpha)}(a)$$

$$\gamma(\beta(\alpha(a))) = \gamma((\beta\alpha)(a)) = \underline{(\gamma(\beta\alpha))}(a)$$

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$$



集合与映射

- 定理7.1.1 设 f 是 A 到 B 的映射, I_A 和 I_B 分别是 A 与 B 中的恒等映射, 则

$$I_B f = f, \quad f I_A = f$$

证明:

- $I_B f$ 和 f 具有相同的定义域 A 和相同的值域 B , 且对于任意的 $a \in A$, 都有

$$I_B f(a) = I_B(f(a)) = f(a)$$

- 因此 $I_B f = f$
- 同理可证: $f I_A = f$



集合与映射

- 定义7.1.5 设两个映射：

$$f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow A$$

若 $gf = I_A$ 成立，则称 f 是左可逆映射， g 是右可逆映射，并称 g 是 f 的左逆映射， f 是 g 的右逆映射。

又若 $fg = I_B$ 也成立，则称 f 和 g 都是可逆映射。

思考：可逆映射是否一定是双射？



集合与映射

- 定理7.1.2 A 到 B 的映射 f :

f 是左可逆的充要条件是 f 为单射

f 是右可逆的充要条件是 f 为满射



集合与映射

- 证明:

- 必要性: f 左可逆 $\implies f$ 为单射

- 如何证明 f 是单射?

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

- 由 f 左可逆, 可知必存在 $g: B \rightarrow A$, 使得

$$gf = I_A$$

$$a_1 = I_A(a_1) = gf(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = gf(a_2) = I_A(a_2) = a_2$$

必要性得证!



集合与映射

- 证明:

- 充分性: f 为单射 $\implies f$ 左可逆

- 如何证明 f 左可逆? 构造 g ! $gf = I_A$

- 定义 $g: B \rightarrow A$ 如下:

$$g(b) = \begin{cases} a, & \text{若存在 } a \in A, \text{ 使 } f(a) = b \\ a_0, & \text{若 } b \notin f(A) \text{ 且 } a_0 \in A \end{cases}$$

- 此时, $\forall a \in A \quad gf(a) = g(f(a)) = g(b) = a$

- 因此 $gf = I_A$

充分性也得证!



集合与映射

- 定理7.1.2 A 到 B 的映射 f :

f 是左可逆的充要条件是 f 为单射

f 是右可逆的充要条件是 f 为满射



集合与映射

- 推论: $f: A \rightarrow B$ 是可逆映射, 当且仅当 f 是
双射



集合与映射

- 定理7.1.3 设 f 是 A 到 B 的映射。

且 $gf = I_A$, $fh = I_B$, 则 $g = h$

证明:

$$g = gI_B = g(fh) = (gf)h = I_A h = h$$

可逆映射的逆映射是唯一的!



主要内容

- 7.1 集合与映射
- **7.2 等价关系**
- 7.3 代数系统的概念
- 7.4 同构与同态



等价关系

- 定义7.2.0 设 A, B 是集合，称集合

$$\{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

是 A 和 B 的笛卡儿积，记为 $A \times B$



等价关系

- 对于集合 A 到集合 B 的任何一个映射 f ，都可以写出很多二元组 (a, b) ，其中 $a \in A$ ， $b \in B$ 。显然，这是 $A \times B$ 的子集。
- 我们将映射的概念加以推广，即定义域不一定是 A 本身，定义域元素对应值域元素也不一定是唯一的，就引出二元关系。



等价关系

- 定义7.2.1 集合 A 和 B 的笛卡儿积 $A \times B$ 的任一子集 R 称为 A 与 B 之间的一个二元关系，它的元素是有序对 (a, b) ，记为 $a R b$ ，其中 $a \in A, b \in B$ 。当 $(a, b) \notin R$ 时，说 a 与 b 没有 R 关系，记作 $a \nR b$ 。
- 当 $A=B$ 时，称 R 为集合 A 上的二元关系



等价关系

- 定义7.2.2 设 R 是集合 A 上的二元关系，如果
 - 1.对所有的 $a \in A$ ，都有 $a R a$ ，即 R 具有自反性
 - 2.对所有的 $a, b \in A$ ，若 $a R b$ ，则 $b R a$ ，即 R 具有对称性
 - 3.对所有的 $a, b, c \in A$ ，若 $a R b$ ， $b R c$ ，则 $a R c$ ，即 R 具有传递性则称 R 是 A 上的等价关系。用符号 $\sim$ 表示。



等价关系

- 设 R 是集合 A 上的一个等价关系，对任一元素 $a \in A$ ，可以把所有与 a 有 R 关系的元素构成一个集合，称之为 A 的一个等价类，记做 $\bar{a}$ ，即 $\bar{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}$
其中， a 为该等价类的代表元



等价关系

- 等价类 $\bar{a}$ 的性质:

1. $a \in \bar{a}$

2. 若 $b, c \in \bar{a}$, 则 $b \sim c$

等价类中任两个元素都有等价关系!

3. 若 $b \in \bar{a}$ 且 $b \sim x$, 则 $x \in \bar{a}$

任两个有等价关系的元素都在同一等价类中!



等价关系

- 定理7.2.1 设 $\sim$ 是 A 上的一个等价关系，对任意元素 $a, b \in A$

若非 $\bar{b} = \bar{a}$

则有 $\bar{b} \cap \bar{a} = \emptyset$



等价关系

- 定理7.2.2 设 $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ 是 A 上由等价关系 $\sim$ 确定的全部等价类, 那么

$$\bigcup_{i=1}^n \overline{a_i} = A \qquad \overline{a_i} \cap \overline{a_j} = \emptyset \quad (i \neq j)$$

集合 A 上的等价关系 $\sim$ 可确定它的一个划分!